



TITLE:

同軸回転する渦糸対の平面解 (波動の非線形現象とその応用)

AUTHOR(S):

大塚, 一路; 高木, 隆司; 渡辺, 慎介

CITATION:

大塚, 一路 ...[et al]. 同軸回転する渦糸対の平面解 (波動の非線形現象とその応用). 数理解析研究所講究録 2004, 1368: 225-233

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25429>

RIGHT:

同軸回転する渦糸対の平面解

横国大工 大塚一路^A (Kazumichi Ohtsuka)
 東京農工大工 高木隆司^B (Ryuji Takaki)
 横国大工 渡辺慎介^A (Shinsuke Watanabe)

^A Department of Physics, Faculty of Engineering, Yokohama National University

^B Faculty of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology

Abstract

A plane solution of an entanglement equation, as an extension of a well known rectilinear co-rotating vortex pair, is obtained. The entanglement equation is derived from the Biot-Savart equation describing the dynamics of a co-rotating vortex pair based on the concept of the localized induction approximation (LIA, for short). Configurations of a coplanar vortex pair are revealed by the analytical solution and are drawn by estimating numerically an integral included in analytical solution. The plane structures of the vortex pair depend on an intervortex separation at boundary.

1 Introduction

本研究では時間発展によってその形状を変えない同軸回転する渦糸対の平面構造について基本的な理解を与ええることを目標とする。我々は解析を進めるにあたり 1984 年に Takaki と Hussain¹ によって与えられた絡み合い方程式を曲線パラメータ表示によって書き換えたものを用いた。絡み合い方程式とは完全流体中の渦糸のダイナミクスを記述する Biot-Savart の方程式を軸対象に配置した同じ循環を持つ 2 本の渦糸に対して定義し、局所誘導近似 (LIA) を行うことにより得られる非線形偏微分方程式である。我々はこの方程式を用いてこれまでに、同軸回転する渦糸の局所的な絡み合いのダイナミクスが K-dV 方程式によって記述されること²を理論的に示している。本研究ではこの方程式にねじれない条件を与え、Kida³ によって導入された解法を用いることにより、有限長さの 2 本の渦糸対の平面解を得ることに成功した。

本稿の構成は、第 2 章で円筒座標系における絡み合いの方程式を与え、第 3 章では平面解を導出し、第 4 章で形状を考察する。そして、5 章で結論を示した。

2 Entanglement equation with a cylindrical coordinate system

2.1 Entanglement equation

最初に同軸回転する渦対の基礎式を導く。渦対の運動を考えると、渦糸は自分自身 (第一渦糸) と第 2 渦糸によって励起される誘導速度によって変形する。これらのダイナミクスは非圧縮完全流体中で Biot-Savart の方程式によって支配される。第一渦糸の $\mathbf{x} = (x, y, z)$ における速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は、これらの効果の重ね合わせ

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\mathbf{s} \times d\mathbf{l}}{s^3} - \frac{\hat{\kappa}}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{s}} \times d\hat{\mathbf{l}}}{s^3}, \quad (1)$$

で記述される。ここに、右辺第1, 2項における積分はそれぞれ第一渦糸, 第二渦糸によって誘起される誘導速度を表している。また κ , $d\mathbf{l}$, and \mathbf{s} は、循環、渦の微小要素、誘導速度を与える点から与えられる渦糸上の点 \mathbf{x} への方向ベクトルである。ハットは第二の渦糸における物理量とする。

渦対の形状は z 対称であると仮定する。すると、第一渦糸と第二渦糸の座標の関係は $\hat{x} = -x$, $\hat{y} = -y$, $\hat{z} = z$ となる。式 (1) の積分を行い、2本の渦糸の運動を表す方程式の局所誘導近似 (LIA)

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\kappa A}{4\pi\rho} \mathbf{b} + \frac{\hat{\kappa}}{2\pi s_0} (\hat{\mathbf{b}} \cos \phi - \hat{\mathbf{n}} \sin \phi) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s_0}{\hat{\rho}} \cos \phi\right), \quad (2)$$

$$A = \log \frac{L s_0}{L^* \sigma},$$

となる。ここに、where \mathbf{n} , \mathbf{b} , ρ , σ , s_0 , ϕ はそれぞれ法線ベクトル、陪法線ベクトル、 \mathbf{x} における曲率半径、カットオフ距離、曲率がないときの渦対の相互距離、 $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ と $\hat{\mathbf{n}}$ のなす角である (Fig. 1 参照)。 L , L^* は同じオーダーに定められているので、 A は σ と s_0 の比とみなすことも出来る。

$\kappa = \hat{\kappa}$ と仮定して、円柱座標系 $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ において、 z 軸対称に配置された絡み合い方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = A \bigg\{ & (r\theta_s z_{ss} - 2r_s \theta_s z_s - r\theta_{ss} z_s) \mathbf{e}_r + (r_{ss} z_s - r\theta_s^2 z_s - r_s z_{ss}) \mathbf{e}_\theta \\ & + (2r_s^2 \theta_s + r r_s \theta_{ss} - r r_{ss} \theta_s + r^2 \theta_s^3) \mathbf{e}_z \bigg\} \\ & - \left\{ \frac{1 - r(r_{ss} - r\theta_s^2)}{r(1 - r_s^2)} \right\} (-r\theta_s \mathbf{e}_z - z_s \mathbf{e}_\theta), \end{aligned} \quad (3)$$

と表される。ここに、 \mathbf{x} は渦糸の位置、 \mathbf{u} は誘導速度、 A は渦度の強さを表すパラメータ、 s は渦糸の接線方向に沿ってとられた曲線パラメータ、 \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_z は r , θ そして z 方向の単位ベクトルである。下添え字はそれぞれの方向の微分である。 r と z は R で t は直線渦糸が一回転する周期 $4\pi R^2/\kappa$ で無次元化されている。

2.2 Kida's method and two vortex filaments

本節では、式 (3) と Kida³ によって導入された方法を基礎として渦対の平面形状を考える。我々は Kida によって導入された方法を同軸回転する渦対に対して適用した。Kida は Ref. 3 の中で、時間発展によってその形状を変えない1本の渦糸の運動が次の3つの運動の重ねあわせ

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = -C \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} + \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} + V \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$\xi = s - Ct, \quad (5)$$

で記述できると仮定した。ここに C , Ω , V はそれぞれ渦糸の接線方向のすべり速度、 z 軸周りの角速度、 z 方向の並進速度である。式 (4) は解

$$\mathbf{x} = r(\xi) \mathbf{e}_r(\xi, t) + (z(\xi) + Vt) \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

を持つ。ここに \mathbf{e}_r は動径方向の単位ベクトルであり

$$\mathbf{e}_r = \cos [\theta(\xi) + \Omega t] \mathbf{e}_x + \sin [\theta(\xi) + \Omega t] \mathbf{e}_y. \quad (7)$$

と定義される。この解は渦糸ソリトン⁴, Euler の エラスチカ⁵, らせん渦糸⁶ などの解を含んでおり Kida クラスと呼ばれている。

同軸回転する渦対の定常解は、1本の渦糸の場合と同様に式 (4) で示された運動の重ねあわせによって記述できる。ここで式 (2) を無次元量で書き直して式 (4) に代入すると

$$-C \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} + \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} + V \mathbf{e}_z = A \left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} \right) + \left[\frac{2(\hat{\mathbf{b}} \cos \phi - \hat{\mathbf{n}} \sin \phi)}{s_0} \right] \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s_0}{\hat{\rho}} \cos \phi\right). \quad (8)$$

を得る。次に上式を円柱座標系で書き直して、 $\partial \mathbf{x} / \partial \xi$ との外積をとると

$$\begin{aligned} & (\Omega r z_\xi - V r \theta_\xi) \mathbf{e}_r + V r_\xi \mathbf{e}_\theta - \Omega r r_\xi \mathbf{e}_z \\ &= A \left(\frac{\mathbf{n}}{\rho} \right) - \left[\frac{1 - r(r_{\xi\xi} - r\theta_\xi^2)}{r(1 - r_\xi^2)} \right] [(-z_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2) \mathbf{e}_r + (-r r_\xi \theta_\xi) \mathbf{e}_\theta + r_\xi z_\xi \mathbf{e}_z]. \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。ここで $\partial / \partial s = \partial / \partial \xi$ (式 (5) より) のため、(3) の右辺は変数を s から ξ に変えてもその形を変えない。それぞれの成分を、式 (9) のそれぞれの成分と比べると以下の3式

$$\mathbf{e}_r : (\Omega r z_\xi - V r \theta_\xi) = A(r_{\xi\xi} - r_\xi \theta_\xi^2) - \left[\frac{1 - r(r_{\xi\xi} - r\theta_\xi^2)}{r(1 - r_\xi^2)} \right] (-z_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2), \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_\theta : V r_\xi = A(2r_\xi \theta_\xi + r \theta_{\xi\xi}) - \left[\frac{1 - r(r_{\xi\xi} - r\theta_\xi^2)}{r(1 - r_\xi^2)} \right] (-r r_\xi \theta_\xi), \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_z : -\Omega r r_\xi = A z_{\xi\xi} - \left[\frac{1 - r(r_{\xi\xi} - r\theta_\xi^2)}{r(1 - r_\xi^2)} \right] r_\xi z_\xi. \quad (12)$$

を得る。式 (10)-(12) と

$$|\mathbf{x}_s|^2 = |\mathbf{t}|^2 = r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2 + z_\xi^2 = 1, \quad (13)$$

が本稿で取り扱う、同軸回転する渦対の基礎式となる。上式 (10)-(12) の右辺第2項を全て無視して $A \rightarrow A' = \log(L/\sigma)$ とすると Kida によって与えられた基礎式と一致する。

3 Coplanar solutions of two vortex filaments

3.1 Governing equation and a solution in a long wave limit

本節では渦対の平面解を導く。前節で与えられた基礎式に平面拘束の条件 $\theta_\xi = 0$ を与えると式 (10)-(12) は

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r : \Omega r z_\xi &= A r_{\xi\xi} - \left[\frac{1 - r r_{\xi\xi}}{r(1 - r_\xi^2)} \right] (-z_\xi^2), \\ \mathbf{e}_\theta : V r_\xi &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{e}_z : -\Omega r r_\xi = A z_{\xi\xi} - \left[\frac{1 - r(r_{\xi\xi})}{r(1 - r_\xi^2)} \right] r_\xi z_\xi. \quad (15)$$

と変形することが出来る。またこれらの式は、 $|\mathbf{x}_\xi| = 1$ から求まる関係式

$$z_\xi = \sqrt{1 - r_\xi^2}, \quad (16)$$

$$z_\xi z_{\xi\xi} = -r_\xi r_{\xi\xi}. \quad (17)$$

を式 (15) に代入することによって

$$\Omega r^2 \sqrt{1 - r_\xi^2} = 1 + (A - 1) r r_{\xi\xi}, \quad (18)$$

となる。もし r が定数であれば、式 (18) は

$$\Omega = \frac{1}{r^2}. \quad (19)$$

となる。この無次元角速度は、直線渦対のそれと一致する。次に渦糸対は z 軸と平行な直線から微小量 ϵ だけずれていると仮定する (長波長近似)。式 (18) の左辺の根号を r_ξ^2 について展開して $O(\epsilon^2)$ のオーダーまで見積もると

$$\Omega r^2 - \frac{\Omega r^2 r_\xi^2}{2} = 1 + (A - 1) r r_{\xi\xi}, \quad (20)$$

を得る。この方程式は $r(\xi)$ から $\xi(r)$ に変数変換することによって解くことが出来る。次の関係式

$$r_\xi = \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{dr}\right)}, \quad (21)$$

$$r_{\xi\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\left(\frac{d\xi}{dr}\right)} \right) = \frac{dr}{d\xi} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\left(\frac{d\xi}{dr}\right)} \right) = \left(\frac{-1}{\left(\frac{d\xi}{dr}\right)^3} \right) \frac{d^2\xi}{dr^2}, \quad (22)$$

を用いると式 (20) は

$$\frac{dp}{dr} - \alpha r p = -\beta \left(\Omega r - \frac{1}{r} \right) p^3, \quad (23)$$

と変形される。ここに $p = d\xi/dr$, $\alpha = \Omega/2(A-1)$ そして $\beta = 1/(A-1)$ である。式 (23) は Bernoulli の微分方程式であり、解は

$$\left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 = e^{-\alpha r^2} \left[2\beta \int \left(\Omega r - \frac{1}{r} \right) e^{\alpha r^2} dr \right] = \left[2 - \beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2} \right]. \quad (24)$$

である。ここに Ei は指数関数積分であり

$$\int \frac{1}{r} e^{\alpha r^2} dr = \frac{1}{2} \text{Ei}[\alpha r^2] \quad (25)$$

で定義される。式 (24) から

$$\frac{dr}{d\xi} = \sqrt{2 - \beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2}}, \quad (26)$$

であり。それゆえ

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - \beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2}}} dr = \xi. \quad (27)$$

となる。さらに式 (16) と (26) から

$$\frac{dz}{d\xi} = \sqrt{\left[\beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2} - 1 \right]}. \quad (28)$$

となる。他方で

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dr} \frac{dr}{d\xi} = \sqrt{2 - \beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2}} \frac{dz}{dr}, \quad (29)$$

なので、式 (28) は

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{\beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2} - 1}{2 - \beta \text{Ei}[\alpha r^2] e^{-\alpha r^2}}}. \quad (30)$$

となる。渦対の形状は上式を r について積分した式

$$z = \int_{r_{\min}(A)}^r \sqrt{\frac{\beta \text{Ei}[\alpha r'^2] e^{-\alpha r'^2} - 1}{2 - \beta \text{Ei}[\alpha r'^2] e^{-\alpha r'^2}}} dr'. \quad (31)$$

で求まる。 r_{\min} については次章で考察する。

3.2 Approximate solution for $A \simeq 1$

本節ではもう一つの近似解を与える。 A が 1 に近い時式 (18) は

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\Omega^2} \right) \frac{1}{r^4}. \quad (32)$$

となる。ここで以下の関係式

$$f = \sqrt{r^4 - \frac{1}{\Omega^2}}, \quad (33)$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{df} \frac{df}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{r^4 - \frac{1}{\Omega^2}}}{r^3} \frac{df}{ds}, \quad (34)$$

を用いると式 (32) は

$$\frac{1}{(f^2 + \frac{1}{\Omega^2})^{\frac{3}{4}}} df = 2ds, \quad (35)$$

と変形できる。ここに関係式 $r = (f^2 + 1/\Omega^2)^{1/4}$ を用いた。式 (35) を積分すると

$$2s = \sqrt{r^4 - \frac{1}{\Omega^2}} \cdot \left\{ {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\left(r^4 - \frac{1}{\Omega^2}\right) \right] \right\}, \quad (36)$$

がとなり、ここで ${}_2F_1$ 超幾何関数である。式 (16) と (32) から

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\Omega r^2}. \quad (37)$$

となり、関係式

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dr} \frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{r^4 - \frac{1}{\Omega^2}}}{r^2} \frac{dz}{dr}, \quad (38)$$

を式 (37) に代入すると

$$dz = \frac{1}{\Omega \sqrt{r^4 - \frac{1}{\Omega^2}}} dr. \quad (39)$$

となり、さらに式 (33) と (34) を用いると、式 (39) は

$$dz = \frac{1}{2\Omega (f^2 + \frac{1}{\Omega^2})^{\frac{3}{4}}} df. \quad (40)$$

となる。そして式 (40) を積分すると

$$z = \frac{\sqrt{(r^4 - \frac{1}{\Omega^2})}}{2\Omega} \cdot \left\{ {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\left(r^4 - \frac{1}{\Omega^2}\right) \right] \right\}. \quad (41)$$

を得ることが出来る。

4 Discussion

4.1 Configuration of a plane vortex pair in a long wave approximation

式 (31) は解析的に積分できないために我々はこの式を数値的に積分した。この時簡単のため、 $\Omega = 1$ とした。最初に前節で求めた解 (31) による渦糸の形状を Fig. 2 に示した。Fig. 2 は、 $A = 1.4$ の時の平面渦糸の形状を示している。点印は紙面手前方向、バツ印は紙面後方に向かう誘導速度を示している。図より渦糸の相互距離が近い(遠い)所では相手の渦糸からの誘導速度が大きい(小さい)ため減速(加速)する方向に曲率を持っていることが見てとれる。そのため、渦対の相互距離 $2r$ は変化するにも関わらず、渦糸が全長に渡って等しい角速度 Ω 持ち、平面に拘束され剛体回転する。また、基礎式に根号が含まれている影響から平面解は有限長さであり、渦対は境界を

持つ形状となっている。実際にこの渦対を実験により観測しようとした場合はこの問題点は固体壁による境界を用いることによって解消できる。なぜなら渦糸は境界に対して垂直に接触する性質を持っているためである。

式 (31) の根号内は $\text{Ei}[\alpha r^{1/2}]e^{-\alpha r^{1/2}}$ を含むため r と A に依存して正負の値をとる。それゆえ、被積分関数が (31) 実数値をとるために r の存在する区間は、 r_{\max} と r_{\min} の間に制限される。

Fig. 3 は r_{\max} , r_{\min} を A に対してプロットしている。ここで、 r_{\max} は $A_c = 1.371$ の前後で不連続な変化を示す。

Fig. 4 では、平面解の形状をパラメータ $A = 1.371, 1.4$ と 1.5 に対して示した。 $A > 1.371$ の時、渦対は Fig. 2 のように水牛の角のような形状をとる。もし、 $A_c = 1.371$ であれば dz/dr は $r = r_{\max}$ で無限大になり漸近的に z 軸に平行な直線渦糸に近づく。他方で、 $A \leq A_c$ の時、式 (31) は $dz/dr = \infty$ 以降の形状をフォローできなくなる (Fig. 5(b) 参照)。Fig. 4 に示されるように、渦対は、 $r < r_{\min}$, $r_{\max} < r$ の区間で存在できない。 A_c と r_{\min} についての詳細な議論は後述する。

式 (31) で与えられている形状は、 $r = r_{\min}$ において $dr/d\xi = 1$ と $dz/d\xi = 0$ であり長波長近似の仮定 $dr/d\xi = O(\epsilon)$ に矛盾している。それゆえ、我々の解析結果と式 (18) を直接数値計算した結果との比較を行った。方程式は、Runge-Kutta 法を用いて同様の境界条件 $z = 0$, $A = 1.4$ に対して数値的に解かれている。Figure 5(a) は、Eq. (31) の結果と数値計算の結果がよく一致することを示している。上述したように、式 (31) から得られる平面形状は $A \leq A_c$ の時 $r = r_{\max}$ において $dr/dz = \infty$ の境界条件を持っており、長波長近似と矛盾している。そこで、Fig. 5(b) でこの条件における形状を $A = 1.37$ に対する数値解と比べた。すると数値計算による結果は、渦糸対が括弧型の形状になることを示した。この形状は、式 (30) では得ることは出来ない。なぜならこの形状は z が r に対する多価関数であるからである。しかし式 (18) は、 ξ によって曲線パラメータ表示がされているのでこのような形状も記述可能となっている。今後、 $A \leq A_c$ に対して渦対の形状を議論する時はこの数値的な形状を採用するものとする。

4.2 Configuration of a plane vortex pair for $A \simeq 1$

Fig. 6 (a) に式 (41) による渦糸の形状を示す。ここでも簡単のため $\Omega = 1$ とした。次に式 (18) を数値的に解いて解析解と比較してみた。パラメータは $A = 1.01, 1.1$ そして 1.4 と変化させ、初期条件として $z = 0$ における境界条件を $dr/d\xi = 0$, $dz/d\xi = 1$, $r_{\text{ini}} = 1.01$ とおいている。ここに定数 r_{ini} は $z = 0$ における r の値 (相互距離) である。数値計算の結果は Fig. 6(b) に示されており、式 (41) と $A = 1.01$ がほぼ一致していることが見て取れる。また、 A の値つまり渦度の強さが大きくなるほど渦対の直線部分が長くなることも図より明らかである。

4.3 Intervortex separation at boundary

これまでの解析結果では平面渦対が $z = 0$ で、 r 軸や z 軸と平行になっていた。そこで本節では $z = 0$ における r と r_ξ の値 (境界条件) が平面渦対の形状にどのように影響を与えているか式 (18) を数値的に解いて考察した。最初のケースとして $z = 0$ における値を $r_\xi = 1$ と $z_\xi = 0$ とし、初期値 $r = r_{\text{ini}}$ を変化させた場合の形状を考察した。式 (18) の数値計算の結果は、 $r_{\text{ini}} < r_{\text{Cmin}}$ の時に全ての A に対して渦対は括弧型の形状を取るを示した。他方で、 $r_{\text{Cmin}} \leq r_{\text{ini}}$ の時渦対は角型の形状を取った。ここに、 r_{Cmin} は渦対が角型から括弧型に遷移する時の $z = 0$ における渦対間の相互距離である。すると我々の前節の解析は平面渦対は $A \leq A_c$ では $r_{\min} < r_{\text{Cmin}}$ の場合を示しており、 $A_c < A$ は $r_{\text{Cmin}} \leq r_{\min}$ を示していることとなる。Fig. 7 では A を変化させた時の r_{\min} と r_{Cmin} の値が比較されている。図より 2 つの値が $A = 1.374$ で一致しており、これは

前節の結果 $A_c = 1.371$ とほぼ一致していることが確認された。第2のケースとして境界条件による渦対の形状遷移をさらに考察するため $z = 0$ における $r = r_{ini}$ の値を $r_\xi = 0$, $z_\xi = 1$ の境界条件のもとに変化させた。式 (19) より, $r_{Cmin} = 1/\sqrt{\Omega} = 1$ だと直線渦糸となることが明らかである。Figure 8 (a), (b) は, $r_{ini} = 0.999$ と $r_{ini} = 1.01$ に対する数値計算の結果を示している。ここに点線は境界条件 $r_{ini} = 1$ に対して描かれる直線渦糸対である。この図から境界における渦の初期値 r_{ini} が平衡距離 $r = 1$ より大きい ($r_{ini} > 1$) と渦対の相互距離は z の値と共に増加し, 逆に平衡距離より小さい ($r_{ini} < 1$) と z の値と共に相互距離が減少することが明らかとなった。これは, Fig. 5 の角型から括弧型の遷移に対応している。この遷移は, 我々の前回の論文²の5章に示されている渦糸対の大域的な絡み合いの相互距離による形状遷移とアナロジーがあるように見える。

5 Conclusion

本研究では, 長波長近似なしの絡みあい方程式を求め, 同軸回転する渦糸対の平面構造を解析した。その結果, 曲率をもった平面渦糸の構造が理論, 数値的に求まり, この形状が同軸回転する直線渦糸の自然な拡張となっていること, 境界における渦糸間の相互距離が平面渦対の形状遷移を支配するパラメータであること等が示された。実際に我々の最新の実験では Fig. 8 (b) に対応する平面渦糸が観測されており現在定量的な解析が進行中である。

参考文献

- ¹ R. Takaki and A. K. M. F. Hussain "Dynamics of entangled vortex filaments," Phys. Fluid **27**, 761 (1984)
- ² K. Ohtsuka, R. Takaki and S. Watanabe "Dynamics of the local entanglement on two vortex filaments described by the Korteweg-de Vries equation," Phys. Fluids **15**, 1065 (2003)
- ³ S. Kida "A vortex filament without change its form," J. Fluid Mech. **112**, 397 (1981)
- ⁴ H. Hasimoto "A soliton on a vortex filament," J. Fluid Mech. **51**, 447 (1972)
- ⁵ H. Hasimoto "Motion of a vortex filament and its relation toastica," J. Phy. Soc. Japan **31**, 293 (1971)
- ⁶ R. Bechov, "On the curveture and torsion of am isolated vortex filament," J. Fluid Mech. **22**, 471(1965)

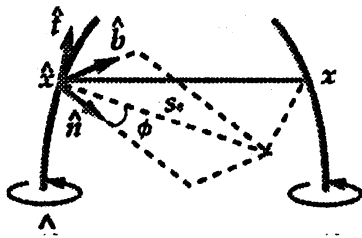


FIG. 1 Definition of geometrical parameters s_0 and ϕ

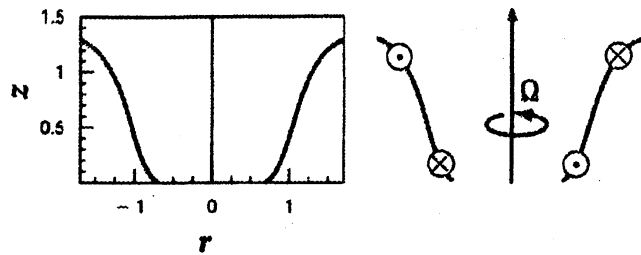


FIG. 2 Left: Plane curve of vortex filaments for $A=1.4$. Right: Rough sketch of the effect of self-induction. The circle with dot indicates the direction of self-induction out of the paper. The circle with cross indicates the direction into the paper.

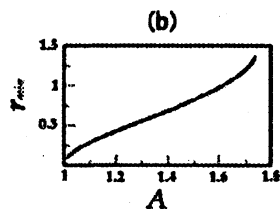
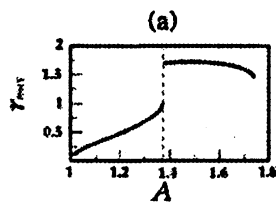


FIG. 3 Dependences of (a) r_{\max} and (b) r_{\min} on the parameter A .

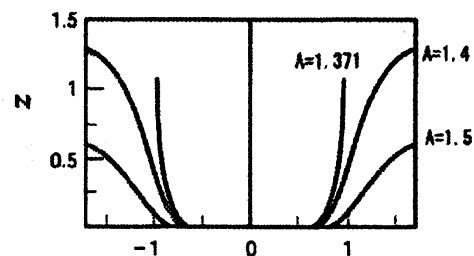


FIG. 4 2D configurations of a vortex pair plotted for $A=1.371$, 1.4 and 1.5 .

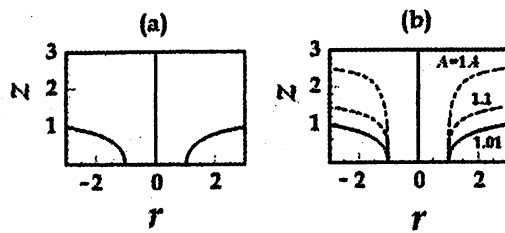


Fig. 5 Comparison of vortex configurations obtained by solving Eq. (26) numerically (broken lines) and by numerical integration of Eq. (39) (solid curves) for (a) $A=1.4$ and (b) $A=1.37$.

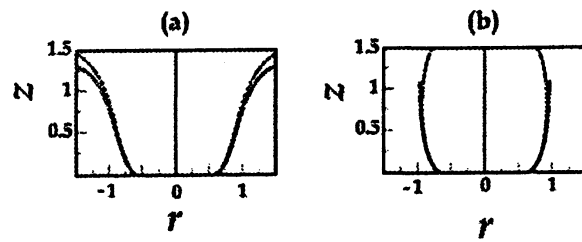


Fig. 6 (a) Coplanar vortex filaments described by Eq. (49). (b) Comparison of the analytical solution (solid curve) and numerical ones (broken curves) for the conditions $A=1.01, 1.1$ and 1.4 with $r_{\min}=1.01$. The numerical curve with $A=1.01$ overlaps with the analytical curve.

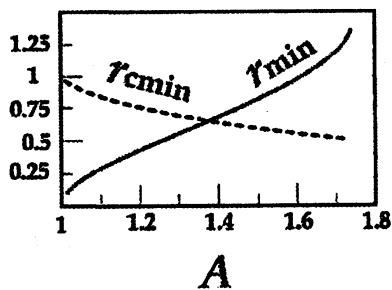


Fig. 7 Dependences of r_{\min} and $r_{C\min}$ on the parameter A . The solid curve indicates the values of r_{\min} for A . The broken one indicates $r_{C\min}$.

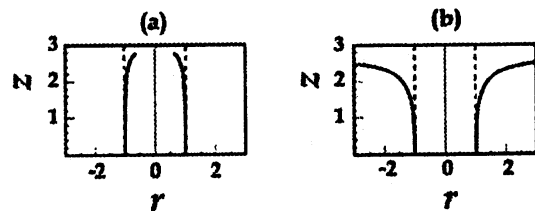


Fig. 8 2D configurations of a vortex pair plotted for the conditions (a) $r_{\text{ini}}=0.999$ and (b) $r_{\text{ini}}=1.01$ at $A=1.4$ and $z=0$. The broken lines indicate rectilinear filaments for $r_{\text{ini}}=1$.